

# Réponse d'un système emballage-palette à un choc

Trois méthodes de résolution

Xavier Louis — Dossier industriel agrégation SII externe 2026

## Mise en situation

Lors d'un transport multimodal, la palette chargée subit des chocs verticaux. On étudie la réponse dynamique d'une palette de masse  $m$  posée sur un emballage modélisé par un ressort et un amortisseur, la plateforme étant soumise à un choc imposé.

## Modélisation

### Définition des solides

Solide	Désignation	Propriétés
$S_0$	Bâti	Fixe, repère galiléen de référence
$S_1$	Plateforme mobile	Soumise au choc imposé $a_{s1}(t)$
$S_2$	Palette + contenu	Masse concentrée $m = 1\,000$ kg

L'emballage est modélisé par un ressort (raideur  $k$ ) et un amortisseur (coefficient  $c$ ) **en parallèle** reliant  $S_1$  à  $S_2$  ; leur masse est négligée.

### Hypothèses de modélisation

- Mouvement purement vertical — 1 degré de liberté.
- Solides  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  indéformables.
- Masses du ressort et de l'amortisseur négligeables.
- Liaison glissière parfaite (sans frottement).
- Contact permanent entre  $S_1$  et  $S_2$  (pas de décollage).
- Système en équilibre statique à  $t = 0^-$  (avant le choc).

### Paramétrage

On définit deux points de contact du ressort, un sur chaque solide :

- $B$  : point sur  $S_1$  (face supérieure de la plateforme, extrémité basse du ressort)
- $B'$  : point sur  $S_2$  (base de la palette, extrémité haute du ressort)
- $G$  : centre de masse de  $S_2$  (au-dessus de  $B'$ , requis pour le PFD)

L'origine de  $R_1$  est  $B$ , l'origine de  $R_2$  est  $B'$ , de sorte qu'à l'état initial les trois repères coïncident.

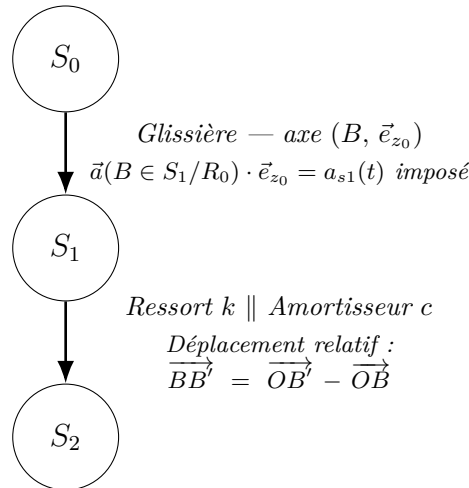
**Repères** (mêmes vecteurs de base, translations pures) :

Repère	Origine	Description
$R_0(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	$O$ fixe sur $S_0$	Repère galiléen, $\vec{e}_z$ vertical ascendant
$R_1(B, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	$B$ sur $S_1$	Face supérieure de la plateforme
$R_2(B', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$	$B'$ sur $S_2$	Base de la palette

À l'état initial (équilibre statique) :  $B \equiv B' \equiv O$  et  $R_0 = R_1 = R_2$ . Le ressort est déjà comprimé de  $\delta_{st} = mg/k$  pour supporter le poids. c'est l'état initiale.

La translation pure garantit :  $\vec{a}(G \in S_2/R_0) = \vec{a}(B' \in S_2/R_0)$

### Graphe des liaisons



### Étude dynamique de $S_2$ dans $R_0$

#### BAME sur $S_2$

Action mécanique	Expression vectorielle
$\vec{P}$ : pesanteur sur $S_2$	$-mg \vec{e}_z$
$\vec{F}_{r \rightarrow 2}$ : action du ressort sur $S_2$	$(mg - k \overrightarrow{BB'} \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z$
$\vec{F}_{a \rightarrow 2}$ : action de l'amortisseur sur $S_2$	$\left( -c \frac{d(\overrightarrow{BB'} \cdot \vec{e}_z)}{dt} \right) \vec{e}_z$

#### Application du PFD

$$m \vec{a}(G \in S_2/R_0) = \vec{P} + \vec{F}_{r \rightarrow 2} + \vec{F}_{a \rightarrow 2}$$

#### Projection sur $\vec{e}_z$ :

$$m \vec{a}(G \in S_2/R_0) \cdot \vec{e}_z = -k BB' - c \dot{BB}'$$

$$\ddot{BB}' = \vec{a}(B' \in S_2/R_0) \cdot \vec{e}_z - \vec{a}(B \in S_1/R_0) \cdot \vec{e}_z = \vec{a}(G \in S_2/R_0) \cdot \vec{e}_z - a_{s1}(t)$$

En substituant dans l'équation du PFD projetée :

$$m (\ddot{BB}' + a_s) = -k BB' - c \dot{BB}'$$

$$\boxed{m \ddot{BB}' + c \dot{BB}' + k BB' = -m a_{s1}(t)}$$

En posant  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  et  $\zeta = c/(2\sqrt{km})$  :

$$B\ddot{B}' + 2\zeta\omega_0 B\dot{B}' + \omega_0^2 BB' = -a_{s1}(t)$$

L'accélération absolue de la palette dans  $R_0$  est :

$$\vec{a}(G \in S_2/R_0) \cdot \vec{e}_z = B\ddot{B}' + a_{s1}(t) = -\omega_0^2 BB' - 2\zeta\omega_0 B\dot{B}'$$

**Entrée : le choc demi-sinusoïde (DIN EN 60068-2-27)**

$$a_{s1}(t) = A \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) [u(t) - u(t - T)] \quad A = 10 g_n, \quad T = 11 \text{ ms}$$

Conditions initiales :  $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ .

## Méthode 1 — Modèle comportemental, résolution analytique classique de l'équation différentielle

L'équation à résoudre est :

$$B\ddot{B}' + 2\zeta\omega_0 B\dot{B}' + \omega_0^2 BB' = -a_{s1}(t) \quad a_{s1}(t) = A \sin(\omega_e t) [u(t) - u(t - T)], \quad \omega_e = \frac{\pi}{T}$$

**Phase forcée ( $0 \leq t \leq T$ )**

Second membre =  $-A \sin(\omega_e t)$ .

**Solution particulière**  $BB'_p(t) = a \cos(\omega_e t) + b \sin(\omega_e t)$  :

En substituant dans l'équation différentielle et identifiant les coefficients, avec  $\Delta = (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_e)^2$  :

$$a = \frac{2A\zeta\omega_0\omega_e}{\Delta} \quad b = \frac{-A(\omega_0^2 - \omega_e^2)}{\Delta}$$

**Solution homogène** ( $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ ) :  $BB'_h(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]$

**Conditions initiales**  $BB'(0) = 0, B\dot{B}'(0) = 0$  :

$$C_1 = -a \quad C_2 = \frac{\zeta\omega_0 a - b\omega_e}{\omega_d}$$

$$BB'(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)] + a \cos(\omega_e t) + b \sin(\omega_e t)$$

**Phase libre ( $t > T, \tau = t - T \geq 0$ )**

Second membre nul. Conditions de raccord calculées depuis la phase forcée :

$$D_1 = BB'(T) \quad D_2 = \frac{B\dot{B}'(T) + \zeta\omega_0 BB'(T)}{\omega_d}$$

$$BB'(\tau) = e^{-\zeta\omega_0 \tau} [D_1 \cos(\omega_d \tau) + D_2 \sin(\omega_d \tau)]$$

### Application numérique ( $m = 1\,000\text{ kg}$ , $\zeta = 0,10$ , $A = 10\text{ g}_n$ , $T = 11\text{ ms}$ )

Config.	$f_0$	$k$ (N/m)	$c$ (N·s/m)	$BB'(T)$ (mm)	$\dot{B}B'(T)$ (m/s)
Souple	2 Hz	157 914	2 513	-3,74	-0,676
Médium	5 Hz	986 960	6 283	-3,67	-0,652
Rigide	10 Hz	3 947 842	12 566	-3,52	-0,596

Les fréquences propres retenues (2, 5 et 10 Hz) couvrent la plage typiquement observée pour des charges palettisées lors du transport. Pour une masse de 1 000 kg, les études expérimentales situent la fréquence propre d'un emballage en carton ondulé entre 5 et 15 Hz selon la rigidité du carton<sup>1</sup> ; la configuration à 5 Hz est la plus représentative, celle à 2 Hz illustre un emballage très souple (proche d'un système avec élément viscoélastique ajouté), celle à 10 Hz un emballage très rigide.

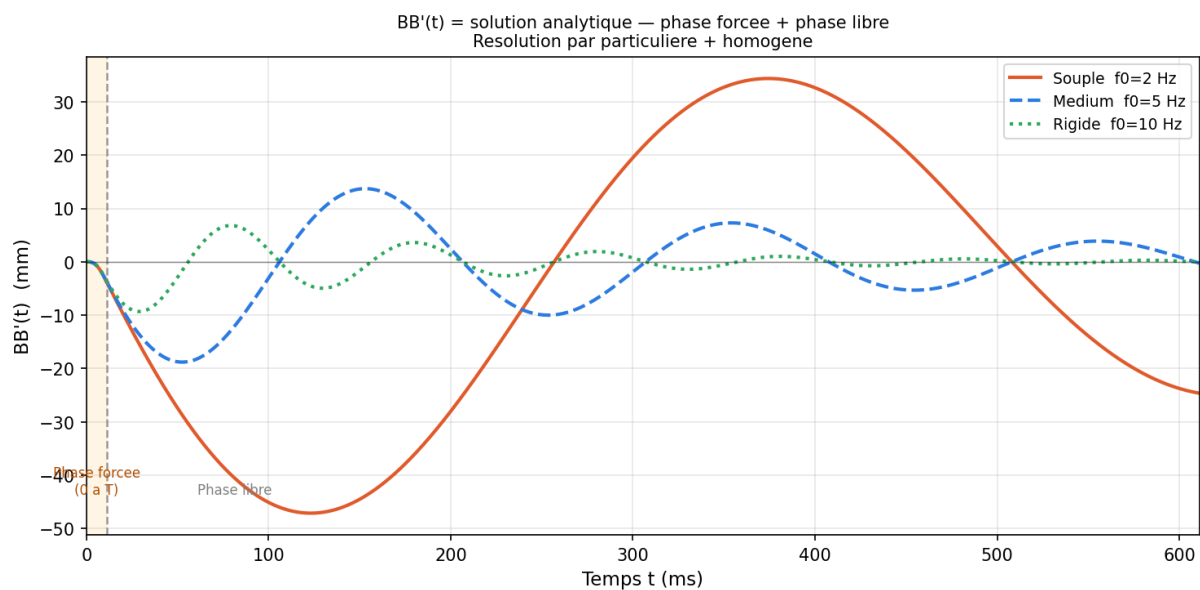


FIGURE 1 –  $BB'(t)$  — résolution analytique classique, phase forcée (fond orange) et phase libre.

## Méthode 2 — Modèle comportemental et transformée de Laplace

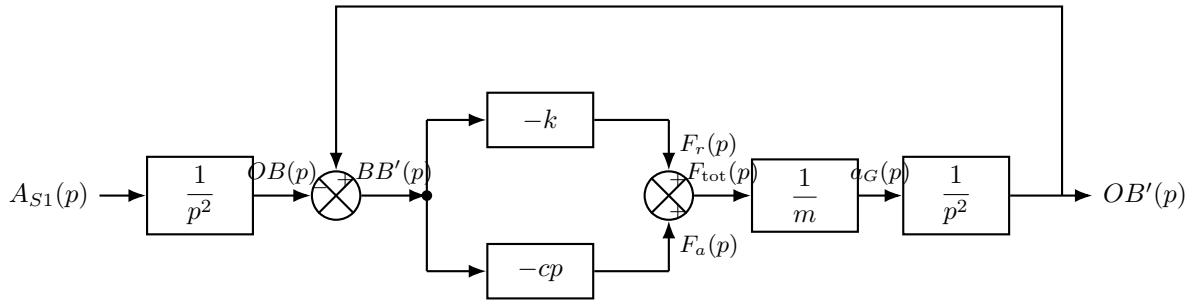
### Fonctions de transfert élémentaires

Bloc	Entrée	Sortie	Expression temporelle	$H(p)$
Ressort	$BB'(t)$ [m]	$F_r(t)$ [N]	$F_r = -k BB'$	$-k$
Amortisseur	$BB'(t)$ [m]	$F_a(t)$ [N]	$F_a = -c \dot{B}B'$	$-cp$
PFD	$F_{\text{tot}}(t)$ [N]	$a_G(t)$ [m/s <sup>2</sup> ]	$a_G = F_{\text{tot}}/m$	$1/m$
Intégration $S_1$	$A_{S1}(t)$ [m/s <sup>2</sup> ]	$OB(t)$ [m]	double intégration	$1/p^2$
Intégration $S_2$	$a_G(t)$ [m/s <sup>2</sup> ]	$OB'(t)$ [m]	double intégration	$1/p^2$

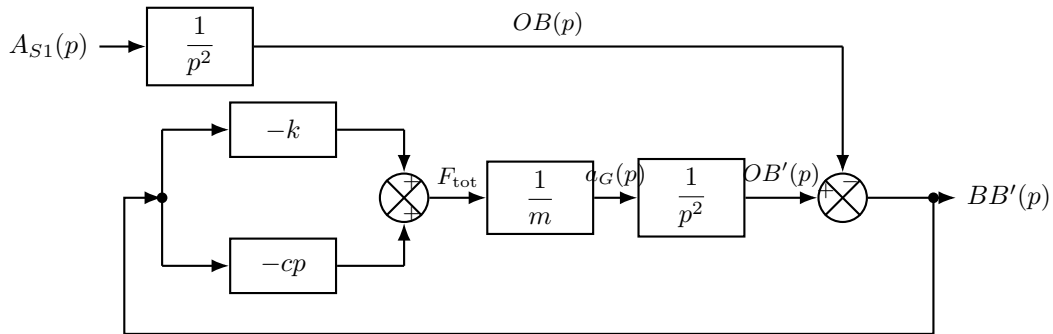
1. Ge C., Sutherland S., *Application of Experimental Modal Analysis to Determine Damping Properties for Stacked Corrugated Boxes*, Mathematical Problems in Engineering, 2013. DOI : 10.1155/2013/651348. Les auteurs mesurent le taux d'amortissement de boîtes en carton ondulé empilées par analyse modale expérimentale

**Schéma bloc**

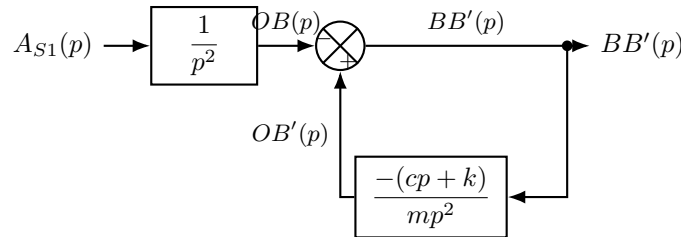
**Schéma développé** — entrée  $A_{S1}(p)$ , sortie  $OB'(p)$  :



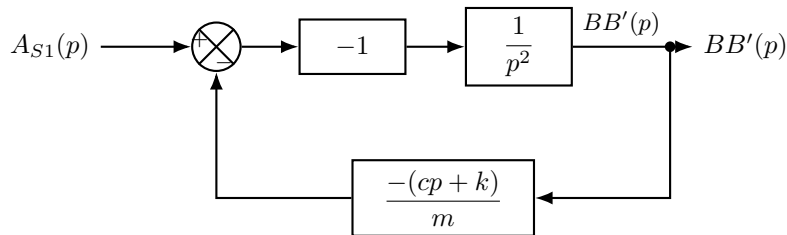
**Même schéma, sortie  $BB'(p)$  :**



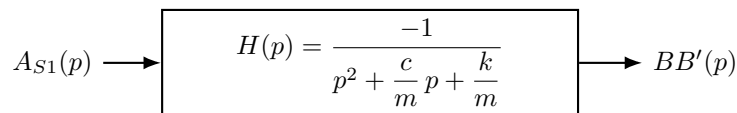
**Schéma semi-réduit :**



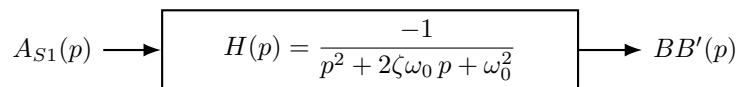
**Forme canonique** — on introduit un gain  $-1$  dans la chaîne directe pour faire apparaître  $A_{S1}(p)$  sur l'entrée positive du sommateur :



**Simplification :**



**Schéma réduit :**



## Identification des paramètres

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \boxed{\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}}$$

## Transformée de Laplace du signal d'entrée

$$a_{s1}(t) = A \sin(\omega_e t) [u(t) - u(t - T)], \quad \omega_e = \frac{\pi}{T}$$

Comme  $\sin(\omega_e(t - T)) = \sin(\omega_e t - \pi) = -\sin(\omega_e t)$ , on réécrit :

$$a_{s1}(t) = A \sin(\omega_e t) u(t) + A \sin(\omega_e(t - T)) u(t - T)$$

Le théorème du retard donne alors :

$$\boxed{A_{S1}(p) = \frac{A\omega_e}{p^2 + \omega_e^2} (1 + e^{-pT})}$$

## Expression de $BB'(p)$

En posant  $G(p) = \frac{-A\omega_e}{(p^2 + \omega_e^2)(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2)}$  :

$$\boxed{BB'(p) = G(p) (1 + e^{-pT})}$$

## Transformée inverse — $BB'(t)$

Par linéarité et théorème du retard :

$$\boxed{BB'(t) = g(t) u(t) + g(t - T) u(t - T)}, \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(p)\}$$

## Calcul de $g(t)$ .

Puisque  $G(p) = H(p) \cdot \frac{A\omega_e}{p^2 + \omega_e^2}$ , la fonction  $g(t)$  est la réponse du système du second ordre  $H(p)$  à l'entrée  $A \sin(\omega_e t)$ . Elle vérifie donc l'équation différentielle :

$$\ddot{g} + 2\zeta\omega_0 \dot{g} + \omega_0^2 g = -A \sin(\omega_e t), \quad g(0) = 0, \quad \dot{g}(0) = 0$$

**Solution particulière**  $g_p = \alpha \cos(\omega_e t) + B \sin(\omega_e t)$  — on substitue dans l'équation et on identifie les coefficients (avec  $\Delta = (\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_e)^2$ ) :

$$\begin{aligned} \cos(\omega_e t) : \quad & \alpha(\omega_0^2 - \omega_e^2) + 2\zeta\omega_0 B\omega_e = 0 \\ \sin(\omega_e t) : \quad & B(\omega_0^2 - \omega_e^2) - 2\zeta\omega_0 \alpha\omega_e = -A \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2A\zeta\omega_0\omega_e}{\Delta}, \quad B = -\frac{A(\omega_0^2 - \omega_e^2)}{\Delta}}$$

**Solution homogène**  $g_h = e^{-\zeta\omega_0 t}[C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]$ , avec  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$  — conditions initiales  $g(0) = 0$ ,  $\dot{g}(0) = 0$  :

$$C_1 = -\alpha, \quad C_2 = -\frac{\zeta\omega_0\alpha + B\omega_e}{\omega_d}$$

$BB'(t)$  par morceaux :

$$BB'(t) = \begin{cases} x_1(t) & 0 \leq t \leq T \\ x_2(t) & t > T \end{cases}$$

**Phase forcée** ( $0 \leq t \leq T$ ) — seul  $g(t)$  est actif :

$$x_1(t) = \alpha \cos(\omega_e t) + B \sin(\omega_e t) + e^{-\zeta\omega_0 t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)]$$

**Phase libre** ( $t > T$ ,  $\tau = t - T$ ) — les termes sinusoidaux de  $g(t)$  et  $g(t - T)$  s'annulent car  $\omega_e T = \pi$  :

$$\cos(\omega_e(t - T)) = \cos(\omega_e t - \pi) = -\cos(\omega_e t), \quad \sin(\omega_e(t - T)) = -\sin(\omega_e t)$$

Il ne subsiste que les termes exponentiels, regroupés par continuité en  $\tau = 0$  :

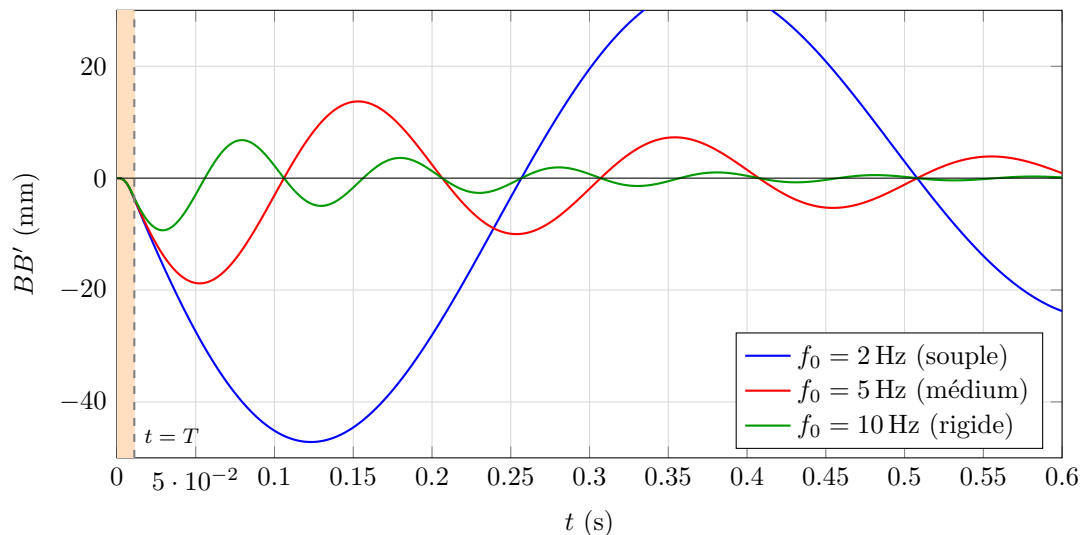
$$x_2(\tau) = e^{-\zeta\omega_0 \tau} [D_1 \cos(\omega_d \tau) + D_2 \sin(\omega_d \tau)]$$

$$D_1 = x_1(T), \quad D_2 = \frac{\dot{x}_1(T) + \zeta\omega_0 x_1(T)}{\omega_d}$$

**Application numérique** ( $m = 1000$  kg,  $\zeta = 0,10$ ,  $A = 10 g_n$ ,  $T = 11$  ms) :

Config.	$f_0$	$\alpha$ (mm)	$B$ (mm)	$C_1$ (mm)	$C_2$ (mm)	$D_1$ (mm)	$D_2$ (mm)
Souple	2 Hz	0,011	1,205	-0,011	-27,5	-3,74	-54,4
Médium	5 Hz	0,027	1,217	-0,027	-11,1	-3,67	-21,2
Rigide	10 Hz	0,058	1,261	-0,058	-5,77	-3,52	-9,89

$BB'(t)$  — trois configurations ( $\zeta = 0,10$ ,  $A = 10 g_n$ ,  $T = 11$  ms)



## Méthode 3 — Modèle acausal Multibody

La palette et son emballage sont modélisés dans un assemblage SolidWorks. Les contraintes sont choisies de façon à ce que les deux liaisons glissières soient automatiquement identifiées lors de l'import dans Simscape Multibody.

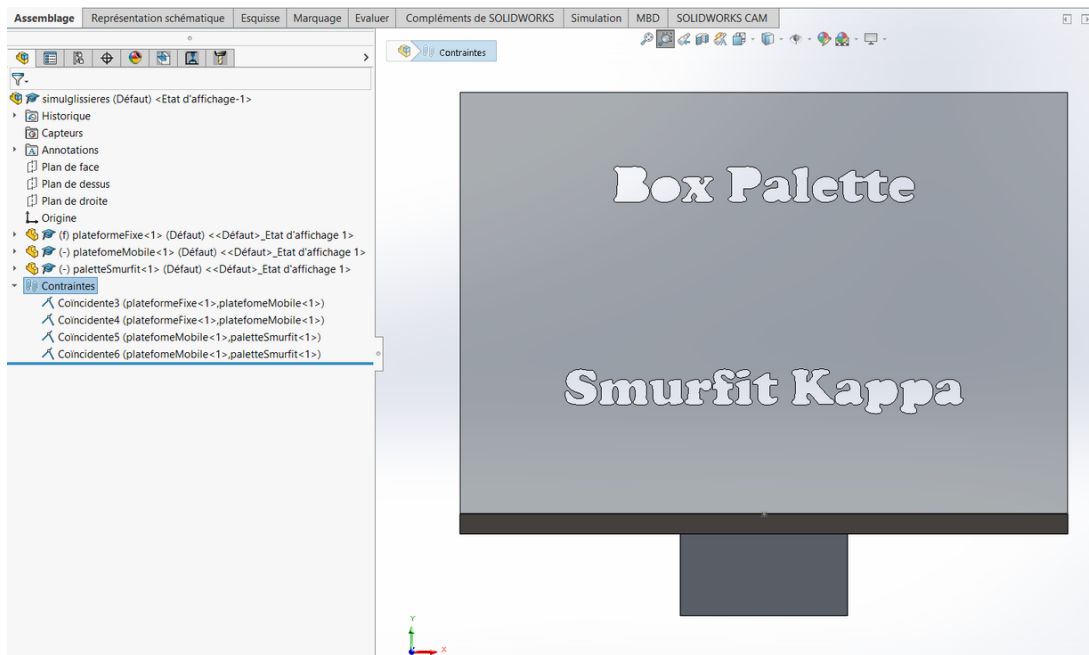


FIGURE 2 – Dessin de la palette et de son support sous SolidWorks.

Après import dans MATLAB/Simscape Multibody, l'assemblage 3D est directement exploitable : les solides, les masses et les liaisons sont reconnus sans resaisie.

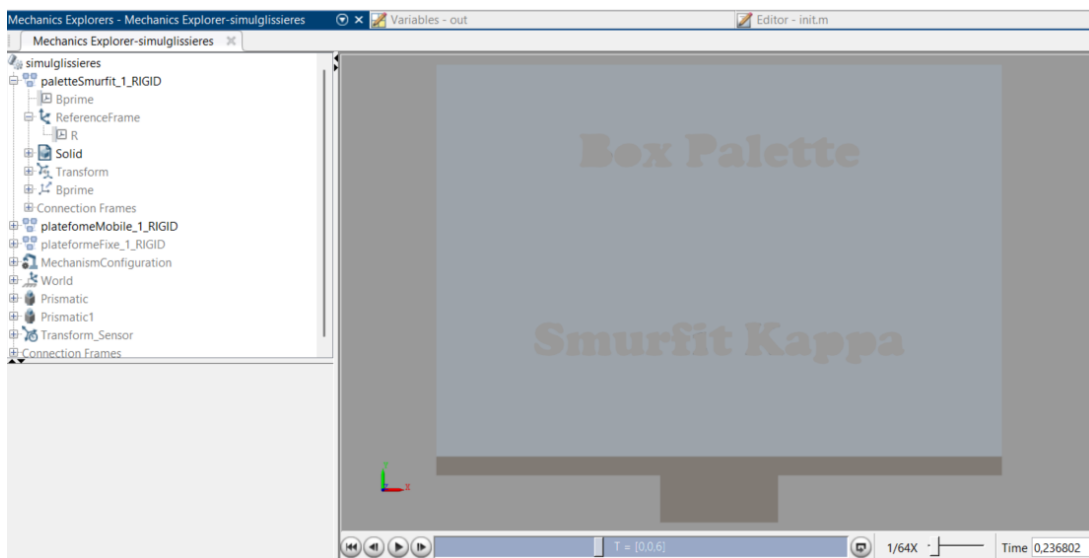


FIGURE 3 – Assemblage 3D dans l'environnement MATLAB/Simscape Multibody.

La liaison glissière entre le support et le repère galiléen est ensuite motorisée à partir du signal

d'accélération demi-sinusoïdale  $a_{s1}(t)$ . Un capteur de position placé sur la liaison  $S_1/S_2$  permet de relever  $BB'(t)$  en sortie de simulation.

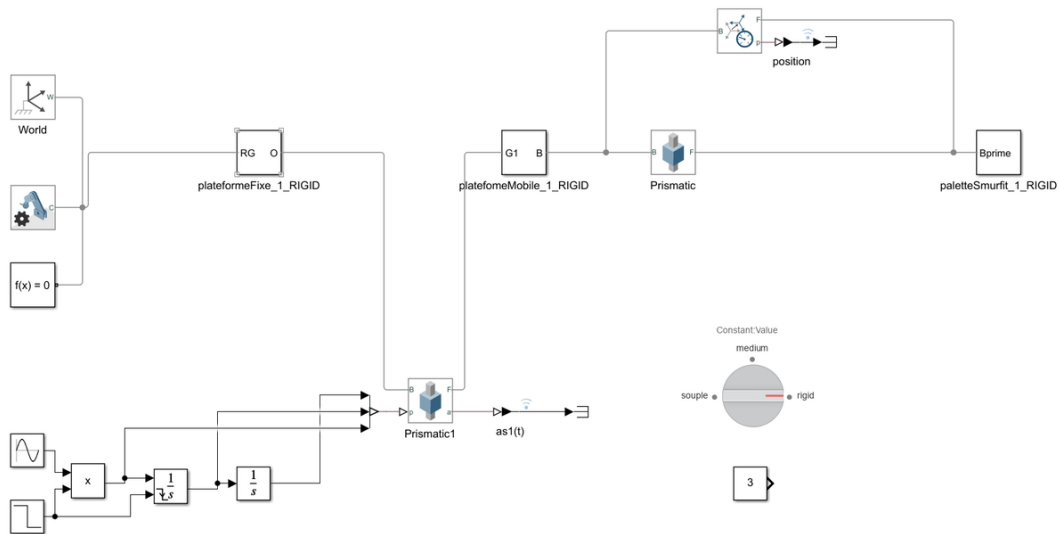


FIGURE 4 – Modèle Simscape Multibody après import et ajout du signal d'entrée et du capteur.

### Configuration du Prismatic Joint $S_1/S_2$

Paramètre	Valeur	Justification
Spring Stiffness	$k = (2\pi f_0)^2 m \text{ N/m}$	$\omega_0^2 m$
Damping Coefficient	$c = 2\zeta\omega_0 m \text{ N}\cdot\text{s/m}$	$2\zeta\sqrt{km}$
Equilibrium Position	$+\delta_{st} = +mg/k$ (positif)	Supporte le poids à $q = 0$

Config.	$f_0$	$k$ (N/m)	$c$ (N·s/m)	$\delta_{st}$ (mm)
Souple	2 Hz	157 914	2 513	62
Médium	5 Hz	986 960	6 283	10
Rigide	10 Hz	3 947 842	12 566	2,5

Les résultats obtenus sont identiques à ceux des deux méthodes précédentes, ce qui valide la cohérence de la modélisation.

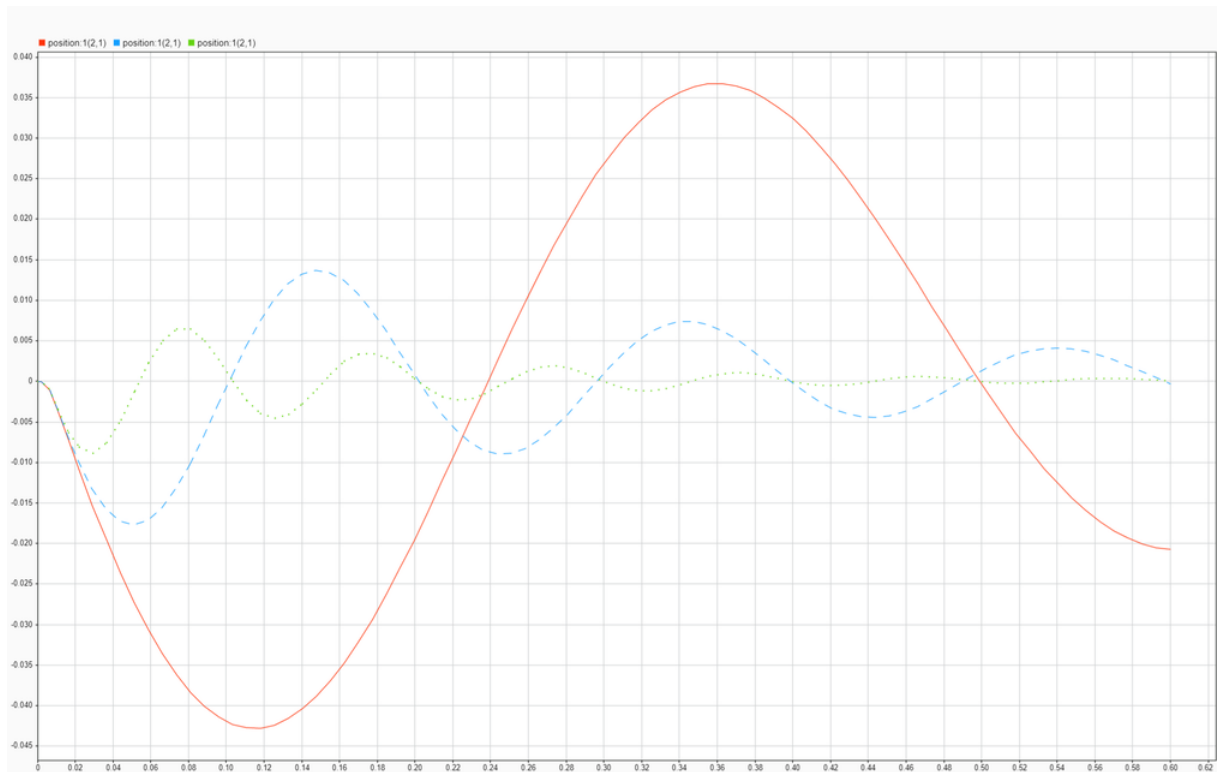


FIGURE 5 – Résultats de simulation Simscape Multibody — courbes superposables aux méthodes 1 et 2.

---

## Comparaison des trois méthodes – conclusion

Les trois méthodes permettent d'obtenir le même résultat pour  $BB'(t)$ . Face au côté fort calculatoire et la difficulté d'obtenir une expression explicite de  $BB'(t)$  ou le temps de mise en oeuvre via le couple solidworks et matlab/simulink multibody, Une quatrième approche est envisageable : la résolution numérique directe de l'équation différentielle par un solveur Python (bibliothèque SciPy, méthode `solve_ivp`). elle présente l'avantage d'être entièrement scriptable, facilement paramétrable, et ne nécessite aucune licence logicielle propriétaire.